

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Проректор по учебной работе и
довузовской подготовке**

А.А. Воронов

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Линейная алгебра
по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	А1360: Передовые методы искусственного интеллекта Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра высшей математики
курс:	1
квалификация:	бакалавр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

1 (осенний) - Экзамен

2 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 120 всего, в том числе:

лекции: 60 час.

семинары: 60 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 90 час.

Подготовка к экзамену: 60 час.

Всего часов: 270, всего зач. ед.: 6

Количество контрольных работ, заданий: 5

Программу составили:

Д.В. Беклемишев, д-р пед. наук, профессор

А.Н. Бурмистров, канд. физ.-мат. наук, доцент

П.А. Кожевников, канд. физ.-мат. наук, доцент

О.К. Подлипский, канд. физ.-мат. наук, доцент

И.А. Чубаров, канд. физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры высшей математики 21.05.2020

Аннотация

Курс "Линейная алгебра" ориентирован на студентов первого курса бакалавриата.

В курсе изучаются основы аналитической геометрии (первый семестр) и основы линейной алгебры (второй семестр).

Первый семестр:

Первая часть курса посвящена изучению векторов, их свойств. Вводятся понятия базиса, системы координат, скалярного, векторного и смешанного произведения.

Во второй части курса изучаются алгебраические линии на плоскости и поверхности в пространстве. Изучается геометрия прямых и плоскостей, решаются позиционные задачи. Рассматриваются линии и поверхности второго порядка, их основные свойства.

Третья часть курса посвящена изучению аффинных и ортогональных преобразований плоскости. Вводится понятие группы. Развивается теория матриц и их определителей. Изучается обратная матрица. Рассматриваются

системы линейных уравнений для случая, когда матрица системы - невырожденная квадратная. Выводятся формулы Крамера.

Второй семестр:

В начале курса изучается понятие ранга матрицы. Изучается общая теория решения систем линейных уравнений, исследуется их совместность при помощи теорем Кронекера-Капелли и Фредгольма.

Даются основы теории

линейных пространств (базис, размерность, сумма и пересечение подпространств).

Вводятся понятия линейных отображения и преобразования, ядра и образа. Обсуждается перевод всех этих понятий на матричный язык. Изучается теорема об изоморфизме. Изучается структура линейного преобразования

линейного пространства. Изучаются инвариантные подпространства, собственные значения и собственные векторы, характеристический многочлен, вопросы, связанные с диагонализуемостью преобразования.

Вводятся линейные формы. Изучается сопряженное пространство и биортогональный базис. Вводятся понятия билинейной и квадратичной форм. Исследуется вопрос приведения квадратичных форм к каноническому

виду. Рассматриваются знакоопределенные квадратичные формы. Изучается критерий Сильвестра.

Рассматривается аксиоматика евклидова пространства. Изучается матрица Грама и ее основные свойства. Изучается процесс ортогонализации. Рассматриваются ортогональное проектирование, ортогональные дополнения.

Изучаются линейные преобразования евклидова пространства. Исследуются ортогональные, сопряженные и самосопряженные преобразования и их основные свойства. Строится ортогональный базис, в котором

квадратичная форма имеет диагональный вид. Рассматривается вопрос одновременного приведения к диагональному виду пары квадратичных форм.

Исследуется унитарное пространство и его аксиоматика. Изучаются унитарные преобразования и эрмитовы формы.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Ознакомление слушателей с основами аналитической геометрии и подготовка к изучению других математических курсов – дифференциальных уравнений, теории функций комплексного переменного, уравнений математической физики, функционального анализа, аналитической механики, теоретической физики, методов оптимального управления и др.

Задачи дисциплины

Приобретение слушателями теоретических знаний и практических умений и навыков в области векторной алгебры, матричной алгебры;

подготовка слушателей к изучению смежных математических дисциплин;

приобретение навыков в применении методов аналитической в физике и других естественнонаучных дисциплинах.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

Определение вектора и операций с векторами (скалярное, векторное и смешанное произведение), их свойства и формулы, связанные с этими операциями;
уравнения прямых линий, плоскостей, линий и поверхностей второго порядка;
свойства линий и поверхностей второго порядка;
свойства аффинных и ортогональных преобразований плоскости.
операции с матрицами, методы вычисления ранга матрицы и детерминантов;
теоремы о системах линейных уравнений Кронекера-Капелли и Фредгольма, правило Крамера, общее решение системы линейных уравнений;
основные определения и теоремы о линейных пространствах и подпространствах, о линейных отображениях линейных пространств;
определения и основные свойства собственных векторов, собственных значений, характеристического многочлена;
приведение квадратичной формы к каноническому виду, закон инерции, критерий Сильвестра;
координатную запись скалярного произведения, основные свойства самосопряженных преобразований;
основы теории линейных пространств в объеме, обеспечивающем изучение аналитической механики, теоретической физики и методов оптимального управления.

уметь:

Применять векторную алгебру к решению геометрических и физических задач;
решать геометрические задачи методом координат, применять линейные преобразования к решению геометрических задач;
производить матричные вычисления, находить обратную матрицу, вычислять детерминанты.
производить матричные вычисления, находить обратную матрицу, вычислять детерминанты;
находить численное решение системы линейных уравнений. находить собственные значения и собственные векторы линейных преобразований, приводить квадратичную форму к каноническому виду, находить ортонормированный базис из собственных векторов самосопряженного преобразования;
оперировать с элементами и понятиями линейного пространства, включая основные типы зависимостей: линейные операторы, билинейные и квадратичные формы.

владеть:

Общими понятиями и определениями, связанными с векторами: линейная независимость, базис, ориентация плоскости и пространства;
ортогональной и аффинной классификацией линий и поверхностей второго порядка.
общими понятиями и определениями, связанными с матричной алгеброй;
геометрической интерпретацией систем линейных уравнений и их решений;
понятиями линейного пространства, матричной записью подпространств и отображений;
ведениями о применениях спектральных задач;
применениями квадратичных форм в геометрии и анализе;
понятиями сопряженного и ортогонального преобразования;
применениями евклидовой метрики в задачах геометрии и анализа, различными приложениями симметричной спектральной задачи;
умением пользоваться необходимой литературой для решения задач повышенной трудности (в вариативной части курса).

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Векторная алгебра	8	8		8
2	Метод координат	4	4		8
3	Прямая и плоскость	8	8		8
4	Линии и поверхности второго порядка	6	8		13
5	Преобразования плоскости	4	2		8
6	Матрицы и системы линейных уравнений	4	6		7
7	Линейное пространство	6	4		7
8	Линейные зависимости в линейном пространстве	4	7		7
9	Нелинейные зависимости в линейном пространстве	6	7		9
10	Евклидово пространство	6	6		9
11	Унитарное пространство	4			6
Итого часов		60	60		90
Подготовка к экзамену		60 час.			
Общая трудоёмкость		270 час., 6 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 1 (Осенний)

1. Векторная алгебра

1.1. Понятие о линейных пространствах и их основных свойствах. Матрицы. Операции сложения и умножения матриц на числа. Определители квадратных матриц 2-го и 3-го порядков.

1.2. Направленные отрезки и действия над ними. Операции сложения направленных отрезков и умножения их на числа. Их свойства. Векторное пространство. Коммутативность, ассоциативность и дистрибутивность операций с векторами.

1.3. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов. Базис, координаты векторов в базисе. Координатное представление векторов. Операции с векторами в координатном представлении. Изменение координат вектора при замене базиса. Необходимое и достаточное условие линейной зависимости векторов в координатной форме.

1.4. Ортогональные проекции векторов и их свойства. Скалярное произведение, его свойства, выражение в координатах. Формулы для определения расстояния между двумя точками и угла между двумя направлениями.

1.5. Ориентированные тройки векторов. Векторное произведение, его свойства, выражение в ортонормированном базисе. Геометрический смысл векторного произведения. Взаимный базис. Выражение векторного произведения в произвольном базисе.

1.6. Смешанное произведение векторов, его свойства, выражение в произвольном и ортонормированном базисах. Геометрический смысл смешанного произведения. Условия коллинеарности и компланарности векторов. Формула двойного векторного произведения. Вывод формулы двойного векторного произведения.

2. Метод координат

2.1. Общая декартова и прямоугольная системы координат. Изменение координат точки при замене системы координат. Матрица перехода и ее свойства. Формулы перехода между прямоугольными системами координат на плоскости. Полярная, цилиндрическая и сферическая системы координат. Формулы перехода между ними и прямоугольной системой координат.

3. Прямая и плоскость

3. Прямая на плоскости и в пространстве. Векторные и координатные способы задания прямой на плоскости и в пространстве. Плоскость в пространстве. Способы задания плоскости в пространстве. Позиционные и метрические задачи о прямых и плоскостях в пространстве. Перевод одной формы описания прямых и плоскостей в пространстве в другую форму. Пучок прямых. Пучок и связка плоскостей. Линейные неравенства.

4. Линии и поверхности второго порядка

4.1. Координатное задание линий на плоскости, поверхностей в пространстве. Алгебраические линии и поверхности. Инвариантность порядка алгебраических линий на плоскости при замене декартовой системы координат. Координатное задание линий в пространстве. Инвариантность порядка алгебраических линий и поверхностей в пространстве при замене декартовой системы координат. Координатное задание фигур на плоскости и тел в пространстве.

4.2. Алгебраические линии 2-го порядка на плоскости. Их ортогональная классификация. Приведение уравнения линии 2-го порядка к каноническому виду. Центральные линии. Сопряженные диаметры. Асимптотические направления. Инварианты.

4.3. Эллипс, гипербола и парабола. Их свойства. Касательные к эллипсу, гиперболе и параболе. Уравнение эллипса, гиперболы и параболы в полярной системе координат.

4.4. Эллипсоиды, гиперболоиды и параболоиды. Их основные свойства. Прямолинейные образующие. Цилиндры и конусы. Поверхности вращения. Классификация и канонические уравнения алгебраических поверхностей 2-го порядка.

5. Преобразования плоскости

5.1. Отображения и преобразования плоскости. Композиция (произведение) отображений. Обратное отображение. Взаимно однозначное отображение. Линейные преобразования плоскости и их свойства. Координатное представление линейных преобразований плоскости.

5.2. Аффинные преобразования и их геометрические свойства. Главные направления аффинного преобразования и их нахождение. Геометрический смысл модуля и знака определителя матрицы аффинного преобразования. Аффинная классификация линий 2-го порядка на плоскости.

5.3. Ортогональные преобразования и их свойства. Разложение аффинного преобразования в произведение ортогонального и двух сжатий. Понятие о группе. Группа аффинных преобразований плоскости и ее подгруппы.

Семестр: 2 (Весенний)

6. Матрицы и системы линейных уравнений

6.1. Умножение и обращение матриц. Ортогональные матрицы. Элементарные преобразования матриц. Матричная форма элементарных преобразований.

6.2. Определение и основные свойства детерминантов. Миноры, алгебраические дополнения, разложение детерминанта по элементам строки или столбца. Формула полного разложения детерминанта и ее следствия. Детерминант произведения матриц.

6.3. Решение систем линейных уравнений по методу Крамера. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре. Теорема о ранге матрицы.

6.4. Системы линейных уравнений. Теорема Кронеккера-Капелли. Фундаментальная система решений и общее решение однородной системы линейных уравнений. Общее решение неоднородной системы. Метод Гаусса. Теорема Фредгольма.

7. Линейное пространство

7.1. Аксиоматика линейного пространства. Линейная зависимость и линейная независимость систем элементов в линейном пространстве. Размерность и базис. Подпространства и линейные оболочки в линейном пространстве. Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма. Формула размерности суммы подпространств. Вывод формулы размерности суммы подпространств. Гиперплоскости.

7.2. Разложение по базису в линейном пространстве. Координатное представление элементов линейного пространства и операций с ними. Теорема об изоморфизме. Координатная форма необходимого и достаточного условия линейной зависимости элементов.

7.3. Изменение координат при изменении базиса в линейном пространстве. Матрица перехода и ее свойства. Координатная форма задания подпространств и гиперплоскостей.

8. Линейные зависимости в линейном пространстве

8.1. Линейные отображения и линейные преобразования линейного пространства. Операции над линейными преобразованиями. Обратное преобразование. Линейное пространство линейных отображений. Алгебра линейных преобразований.

8.2. Матрицы линейного отображения и линейного преобразования для конечномерных пространств. Операции над линейными преобразованиями в координатной форме. Изменение матрицы линейного отображения при замене базисов. Изоморфизм пространства линейных отображений и пространства матриц.

8.3. Инвариантные подпространства линейных преобразований. Собственные векторы и собственные значения. Собственные подпространства. Линейная независимость собственных векторов, принадлежащих различным собственным векторам.

8.4. Нахождение собственных значений и собственных векторов линейного преобразования конечномерного линейного пространства. Характеристическое уравнение. Оценка размерности собственного подпространства. Условия диагонализруемости матрицы линейного преобразования. Приведение матрицы линейного преобразования к треугольному виду.

8.5. Линейные формы. Сопряженное (двойственное) пространство. Биортогональный базис. Вторичное сопряженное пространство.

9. Нелинейные зависимости в линейном пространстве

9.1. Билинейные и квадратичные формы. Их координатное представление в конечномерном линейном пространстве. Изменение матриц билинейной и квадратичной форм при изменении базиса.

9.2. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа. Теорема инерции для квадратичных форм. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра. Приведение квадратичной формы к диагональному виду элементарными преобразованиями. Формулировка теоремы Жордана.

10. Евклидово пространство

10.1. Аксиоматика евклидова пространства. Неравенство Коши-Буняковского. Неравенство треугольника. Матрица Грама и ее свойства.

10.2. Конечномерное евклидово пространство. Ортогонализация базиса. Переход от одного ортонормированного базиса к другому. Ортогональное дополнение подпространства.

10.3. Линейные преобразования евклидова пространства. Ортогональное проектирование на подпространство. Сопряженные преобразования, их свойства. Координатная форма сопряжения преобразования конечномерного евклидова пространства.

10.4. Самосопряженные преобразования. Свойства их собственных векторов и собственных значений. Существование базиса из собственных векторов самосопряженного преобразования.

10.5. Ортогональные преобразования. Их свойства Координатный признак ортогональности. Свойства ортогональных матриц. Полярное разложение линейных преобразований евклидова пространства. Канонический вид матрицы ортогонального преобразования. Сингулярное разложение.

10.6. Построение ортонормированного базиса, в котором квадратичная форма имеет диагональный вид. Одновременное приведение к диагональному виду пары квадратичных форм, одна из которых является знакоопределенной.

11. Унитарное пространство

11.1. Унитарное пространство и его аксиоматика. Унитарные и эрмитовы матрицы. Унитарные и эрмитовы преобразования. Эрмитовы формы. Свойства унитарных и эрмитовых преобразований. Свойства эрмитовых форм.

11.2. Понятие о тензорах. Основные тензорные операции. Тензоры в евклидовом пространстве. Тензоры в ортонормированном базисе.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная мультимедиа проектором, экраном и микрофоном.

6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [Текст] : учебник для вузов / Д. В. Беклемишев .— 12-е изд., испр. — М. : Физматлит, 2008, 2009 .— 312 с.
2. Введение в алгебру [Текст] : в 3 ч. : учебник для вузов / А. И. Кострикин .— М. : МЦНМО, 2012 .— Ч. 1 : Основы алгебры. - 2012. - 272 с.
3. Аналитическая геометрия и линейная алгебра [Текст] : в 2 ч. : учеб. пособие для вузов. Ч. 1 / А. Е. Умнов ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Моск. физико-техн. ин-т (гос. ун-т) .— 2-е изд., испр. и доп. — М. : Изд-во МФТИ, 2006 .— 272 с.
4. Аналитическая геометрия и линейная алгебра [Текст] : в 2 ч. : учеб. пособие для вузов. Ч. 2 / А. Е. Умнов ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Моск. физико-техн. ин-т (гос. ун-т) .— 2-е изд., испр. и доп. — М. : Изд-во МФТИ, 2006 .— 298 с.
5. Лекции по аналитической геометрии и линейной алгебре [Текст] : учеб. пособ. ; рек. Уч.-метод. сов. МФТИ / В. И. Чехлов ; М-во образования РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— М : МФТИ, 2000 .— 260 с.
6. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре [Текст] : учеб. пособие / Л. А. Беклемишева, А. Ю. Петрович, И. А. Чубаров ; под ред. Д. В. Беклемишева .— 2-е изд., перераб. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001 .— 496 с.
7. Введение в алгебру [Текст] : в 3 ч. Ч. 3 : Основные структуры алгебры : учебник для вузов / А. И. Кострикин .— 2-е изд., стереотип. — М. : МЦНМО, 2009, 2012 .— 272 с.
8. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [Текст] : учебник для вузов / Д. В. Беклемишев .— 12-е изд., испр. — М. : Физматлит, 2008, 2009 .— 312 с.
9. Аналитическая геометрия и линейная алгебра [Текст] : в 2 ч. : учеб. пособие для вузов. Ч. 1 / А. Е. Умнов ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Моск. физико-техн. ин-т (гос. ун-т) .— 2-е изд., испр. и доп. — М. : Изд-во МФТИ, 2006 .— 272 с.
10. Аналитическая геометрия и линейная алгебра [Текст] : в 2 ч. : учеб. пособие для вузов. Ч. 2 / А. Е. Умнов ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Моск. физико-техн. ин-т (гос. ун-т) .— 2-е изд., испр. и доп. — М. : Изд-во МФТИ, 2006 .— 298 с.
11. Лекции по аналитической геометрии и линейной алгебре [Текст] : учеб. пособ. ; рек. Уч.-метод. сов. МФТИ / В. И. Чехлов ; М-во образования РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— М : МФТИ, 2000 .— 260 с.

12. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре [Текст] : учеб. пособие / Л. А. Беклемишева, А. Ю. Петрович, И. А. Чубаров ; под ред. Д. В. Беклемишева .— 2-е изд., перераб. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001 .— 496 с.

13.

Дополнительная литература

1. Введение в алгебру [Текст] : в 3 ч. Ч. 2 : Линейная алгебра : учебник для вузов / А. И. Кострикин .— 2-е изд., стереотип. — М. : МЦНМО, 2009, 2012 .— 368 с.
2. Введение в алгебру [Текст] : в 3 ч. : учебник для вузов / А. И. Кострикин .— М. : МЦНМО, 2012 .— .— Ч. 1 : Основы алгебры. - 2012. - 272 с.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://www.math.mipt.ru>

<http://lib.mipt.ru>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Приведены в ежегодно разрабатываемых домашних заданиях.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	AI360: Передовые методы искусственного интеллекта Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра высшей математики
курс:	<u>1</u>
квалификация:	бакалавр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

- 1 (осенний) - Экзамен
- 2 (весенний) - Экзамен

Разработчики:

Д.В. Беклемишев, д-р пед. наук, профессор
А.Н. Бурмистров, канд. физ.-мат. наук, доцент
П.А. Кожевников, канд. физ.-мат. наук, доцент
О.К. Подлипский, канд. физ.-мат. наук, доцент
И.А. Чубаров, канд. физ.-мат. наук, доцент

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Линейная алгебра» обучающийся должен:

знать:

Определение вектора и операций с векторами (скалярное, векторное и смешанное произведение), их свойства и формулы, связанные с этими операциями;
уравнения прямых линий, плоскостей, линий и поверхностей второго порядка;
свойства линий и поверхностей второго порядка;
свойства аффинных и ортогональных преобразований плоскости.
операции с матрицами, методы вычисления ранга матрицы и детерминантов;
теоремы о системах линейных уравнений Кронекера-Капелли и Фредгольма, правило Крамера, общее решение системы линейных уравнений;
основные определения и теоремы о линейных пространствах и подпространствах, о линейных отображениях линейных пространств;
определения и основные свойства собственных векторов, собственных значений, характеристического многочлена;
приведение квадратичной формы к каноническому виду, закон инерции, критерий Сильвестра;
координатную запись скалярного произведения, основные свойства самосопряженных преобразований;
основы теории линейных пространств в объеме, обеспечивающем изучение аналитической механики, теоретической физики и методов оптимального управления.

уметь:

Применять векторную алгебру к решению геометрических и физических задач;
решать геометрические задачи методом координат, применять линейные преобразования к решению геометрических задач;
производить матричные вычисления, находить обратную матрицу, вычислять детерминанты.
производить матричные вычисления, находить обратную матрицу, вычислять детерминанты;
находить численное решение системы линейных уравнений. находить собственные значения и собственные векторы линейных преобразований, приводить квадратичную форму к каноническому виду, находить ортонормированный базис из собственных векторов самосопряженного преобразования;
оперировать с элементами и понятиями линейного пространства, включая основные типы зависимостей: линейные операторы, билинейные и квадратичные формы.

владеть:

Общими понятиями и определениями, связанными с векторами: линейная независимость, базис, ориентация плоскости и пространства;
ортогональной и аффинной классификацией линий и поверхностей второго порядка.
общими понятиями и определениями, связанными с матричной алгеброй;
геометрической интерпретацией систем линейных уравнений и их решений;
понятиями линейного пространства, матричной записью подпространств и отображений;
ведениями о применениях спектральных задач;
применениями квадратичных форм в геометрии и анализе;
понятиями сопряженного и ортогонального преобразования;
применениями евклидовой метрики в задачах геометрии и анализа, различными приложениями симметричной спектральной задачи;
умением пользоваться необходимой литературой для решения задач повышенной трудности (в вариативной части курса).

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Текущий контроль осуществляется на основе балльно-рейтинговой системы (БРС) оценки знаний по изучаемой дисциплине. БРС учитывает выполнение студентами совокупности домашних заданий и контрольных работ в соответствии с учебным планом. Данные о посещаемости и текущей успеваемости вносятся преподавателями в специальные журналы, отражаются в электронной системе контроля и учитываются в БРС.

Текущий контроль на основе домашних заданий осуществляется в течение учебного семестра в сроки, установленные Учебным управлением, в соответствии с учебным планом.

Для сдачи задания студент обязан предоставить решение задачи домашнего задания в письменной форме, ответить на вопросы преподавателя и написать контрольную работу по заданию, по которой проверяются знание понятий и утверждений по темам сдаваемого задания и умение решать задачи.

Во время выполнения контрольной работы нельзя пользоваться помощью других лиц, вычислительной техники и мобильными телефонами.

*Прикрепляется БРС по изучаемому предмету.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Контрольные вопросы (первый семестр):

1. Вычислите. Являются ли строки этого определителя линейно зависимыми? Если да, укажите эту линейную зависимость.
2. В треугольнике ABC медианы AB и BK пересекаются в точке O. Найдите координаты векторов AM и BO в базисе CA, CB.
3. Запишите уравнение прямой $[r, \vec{a}] = b$ в векторно-параметрическом виде.
4. Укажите какой-нибудь нормальный вектор прямой на плоскости, имеющей в прямоугольной системе координат угловой коэффициент K.
5. Является ли кривая, заданная уравнением $2x^2 - 4xy + 5y^2 + 8x - 2y = 0$, центральной? Найдите координаты ее центра. Определите тип кривой.
6. Пусть A и B – две квадратные матрицы одного размера. Обязаны ли совпадать ранги матриц AB и BA?
7. Запишите общее решение уравнения $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ в виде суммы частного решения и произвольной линейной комбинации фундаментальной системы решений.
8. Образуется ли линейное пространство с обычными операциями сложения и умножения на число:
а) множество функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a, b]$;
б) множество функций, определенных на $[a, b]$ и таких, что $f(a) = 0$;

Примеры экзаменационных билетов (первый семестр):

Билет № 1

- 1) Линейно зависимые и независимые системы векторов. Связь линейной зависимости с коллинеарностью или компланарностью векторов.
- 2) На эллипсе $x^2 + 3y^2 = 3$ найти точку M, ближайшую к прямой $x + y = 10$. Вычислить расстояние от точки M до этой прямой. Система координат декартова прямоугольная.

Билет № 2

- 1) Скалярное произведение и его свойства. Ортогональные проекции. Выражение скалярного произведения в координатах. Биортогональный базис.
- 2) При каком значении параметра α точки A(1,2,3), B(3,4,5), C(1,-1,4), D(2,3, α) лежат в одной плоскости? Написать общее уравнение плоскости при найденном значении параметра. Система координат общая декартова.

Контрольные вопросы (второй семестр):

1. Докажите, что все миноры порядка k в некоторой матрице равны 0, то миноры более высоких порядков также равны 0.
2. Докажите, что если столбцы матрицы системы линейных уравнений линейно независимы, то система имеет не более одного решения.
3. Что такое прямая сумма линейных подпространств? Докажите, что пространство всех функций, определенных на отрезке $[-a, a]$, является прямой суммой подпространства четных функций и подпространства нечетных функций.
4. Как связаны между собой кратность корня характеристического многочлена линейного преобразования и размерность соответствующего собственного подпространства? Приведите пример, когда они различны.
5. Как изменится матрица перехода от одного базиса к другому, если :
 - а) поменять местами i -й и j -й векторы первого базиса;
 - б) поменять местами i -й и j -й векторы второго базиса;
 - в) расположить векторы обоих базисов в обратном порядке?
6. Какой вид имеет матрица линейного преобразования в базисе e_1, \dots, e_n , если e_1, \dots, e_n ($k < n$) образуют базис в инвариантном подпространстве данного пространства?
7. Докажите, что определитель матрицы линейного преобразования не меняется при изменении базиса. Верно ли это для матрицы квадратичной формы? Докажите, что при переходе от одного ортонормированного базиса в евклидовом пространстве к другому определитель матрицы квадратичной формы не меняется.
8. Какие значения может принимать определитель ортогональной матрицы? Верно ли, что если определитель матрицы по модулю равен 1, то она ортогональна?
9. Что такое положительно (отрицательно) определенная квадратичная форма? Сформулируйте критерий Сильвестра для положительно определенных квадратичных форм его аналог для отрицательно определенных квадратичных форм.
10. Сформулируйте свойства собственных значений самосопряженного и ортогонального преобразований. Докажите, что собственные векторы этих преобразований, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

Примеры экзаменационных билетов (второй семестр):

Билет № 1

- 1) Ранг матрицы. Теорема о ранге матрицы. Теорема о базисном миноре.
- 2) Приведите квадратичную форму $2x_1x_2+2x_2x_3+2x_3x_4$ (в \mathbb{R}^4) к каноническому виду и найдите канонический базис, положительный и отрицательный индексы инерции.

Билет 2

- 1) Система линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Теорема Фредгольма. Фундаментальная система решений. Общее решение системы линейных уравнений.
- 2) Найдите (в исходном ортонормированном базисе в \mathbb{R}^4) матрицу ортогонального проектирования на подпространство, заданное уравнением, $x_1-x_2-x_3+x_4=0$. Является ли это преобразование самосопряженным? Является ли это преобразование ортогональным?

Критерии оценивания

Оценка «отлично (10)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;

оценка «отлично (9)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые были самостоятельно обнаружены и исправлены;

оценка «отлично (8)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые после указания экзаменатора были самостоятельно исправлены;

оценка «хорошо (7)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает неточности в ответе или делает несущественные ошибки при решении задач;

оценка «хорошо (6)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает небольшие ошибки в ответе и (или) при решении задач;

оценка «хорошо (5)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но отвечает неуверенно и (или) допускает ошибки при решении задач;

оценка «удовлетворительно (4)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, если при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «удовлетворительно (3)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, не владеющему некоторыми разделами учебной программы, но умеющему применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется обучающемуся, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;

оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется обучающемуся, показавшему полное незнание учебной программы дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

При проведении устного экзамена обучающемуся предоставляется один час (астрономический) на подготовку. Опрос обучающегося по билету на устном экзамене не должен превышать двух часов.

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.